线性代数　中国科学技术大学 2023 春
二次型

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

遗留问题: 相合等价关系的标准形.
下面我们仅考虑实对称矩阵的相合标准形[1].

由于任意实对称矩阵正交相似于对角阵, 因此我们有如下结论.

性质 (正交相合标准形)

设 n 阶实对称矩阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 则存在正交矩阵 P 使得

$$P^T AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

从而矩阵 A 相合于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 称这个对角阵为 A 的正交相合标准形.

[1]注: 若矩阵 A, B 相合, 则 A 对称当且仅当 B 对称.

实对称矩阵的相合规范形

实对称矩阵的特征值分为三类: 正, 负, 零.

定理 (相合规范形)

设 A 为实对称矩阵, 则存在可逆阵 P 使得

$$P^TAP = \operatorname{diag}(I_r, -I_s, 0). \qquad (A \text{ 的相合规范形})$$

其中 r, s 由 A 唯一确定不依赖于 P 的选取, 且满足

$$r + s = \operatorname{rank}(A) \le n.$$

称 r 为 A 的正惯性指数, 称 s 为 A 的负惯性指数, 称 $r - s$ 为 A 的符号差.

证明思路: 存在性, 显然. 反证唯一性: 若 $\operatorname{diag}(I_r, -I_s, 0)$ 与 $\operatorname{diag}(I_{r'}, -I_{s'}, 0)$ 相合, 设 $P^T\operatorname{diag}(I_{r'}, -I_{s'}, 0)P = \operatorname{diag}(I_r, -I_s, 0)$, 则 $r + s = r' + s'$. 不妨设 $r < r'$(则 $s > s'$). 记 $y = Px$. 则齐次方程组 $x_1 = \cdots = x_r = y_{r'+1} = \cdots = y_n = 0$ 有非零解 $x_0 = (0, \cdots, 0, a_{r+1}, \cdots, a_n)^T \neq 0$. 令 $y_0 = Px_0 = (b_1, \cdots, b_{r'}, 0, \cdots, 0)^T$. 则

$$\begin{aligned} 0 < b_1^2 + \cdots + b_{r'}^2 &= (Px_0)^T\operatorname{diag}(I_{r'}, -I_{s'}, 0)(Px_0) \\ &= x_0^T\operatorname{diag}(I_r, -I_s, 0)x_0 = -a_{r+1}^2 - \cdots - a_{r+s}^2 \le 0. \end{aligned}$$

注: 规范形唯一. 其中 r, s 分别为 A 的正特征值和负特征值的个数.

推论

n 阶实对称矩阵 A 正定当且仅当其正惯性指数为 n.

在各个领域我们会碰到很多二次齐次多项式. 例如, 三维空间和四维时空中点到原点的距离.

例

1. 空间距离公式

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x, y, z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

2. 时空 (Lorentz 空间) 中的距离公式

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix};$$

注: 保持时空距离 (Lorentz 内积) 的变换称为Lorentz 变换.

二次型的定义

定义 ((实) 二次型)

称实数域[a]上的二次齐次多项式为(实) 二次型.

[a]这门课程仅考虑实数域上的二次型. 更一般地, 可类似的定义任意数域上的二次型.

例

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;
2. $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$;
3. 欧氏度量 $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
4. 时空度量 $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$.

由于 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次单项式全体集为

$$x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_1x_n, \quad x_2^2, \cdots, x_2x_n, \quad x_3^2, \cdots, \quad x_n^2,$$

因此一般的二次型可表示为

$$\begin{array}{rccccccc} Q(x_1, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 & + & {\color{red}2a_{12}x_1x_2} & + & \cdots & + & {\color{blue}2a_{1n}x_1x_n} \\ & & + & a_{22}x_2^2 & + & \cdots & + & {\color{green}2a_{2n}x_2x_n} \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & + & a_{nn}x_n^2 \end{array}$$

其中 a_{ij} 全部为实数. 根据 $x_ix_j = x_jx_i$, 我们也可将上式改写为

$$\begin{array}{rccccccc} Q(x_1, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1x_1 & + & {\color{red}a_{12}x_1x_2} & + & \cdots & + & {\color{blue}a_{1n}x_1x_n} \\ & +{\color{red}a_{12}x_2x_1} & + & a_{22}x_2x_2 & + & \cdots & + & {\color{green}a_{2n}x_2x_n} \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & +{\color{blue}a_{1n}x_nx_1} & & {\color{green}a_{2n}x_nx_2} & + & \cdots & + & a_{nn}x_nx_n \end{array}$$

利用矩阵的乘法, 可进一步的将二次型改写为

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = x^T A x, \tag{1}$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 实对称, $x = (x_1, x_2, , \cdots, x_n)^T$ 为变元组成的列向量.

性质 (二次型的矩阵)

1. 式(1)中的实对称矩阵 A 由二次型 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 唯一确定, 称 A 为二次型 Q 的矩阵. 此外, 称 A 的秩为二次型 Q 的秩, 称 A 的特征值为二次型 Q 的特征值.
2. 反之, 对于任意实对称矩阵, 通过式(1), 可以构造一个二次型.

简言之, 我们有如下一一对应:

$$\text{二次型} \xleftrightarrow[1:1]{Q=x^TAx} \text{实对称矩阵}^2$$

[2]若我们不要求式(1)中的矩阵 A 对称, 则 A 的选取不唯一. 例如, 给定任意反对称矩阵 A, 二次型 x^TAx 都为零二次型.

例

求下列二次型对应的矩阵.

1. $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;
2. $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$;
3. 欧氏度量 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$;
4. 时空度量 $Q(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$;
5. $Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$, 其中 A 为 n 阶实方阵.

二次型变元的可逆线性替换

给定二次型

$$Q = Q(x_1, \cdots, x_n) = x^T Ax. \qquad (A^T = A),$$

对变量 $x_1, \cdots, x_n$ 做一个可逆 (非退化) 的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n, \\ x_1 = p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \cdots + p_{nn}y_n, \end{cases}$$

其中系数矩阵 $P = (p_{ij})_{n\times n}$ 可逆. 则

$$Q = x^T Ax = (y^T P^T)A(Py) = y^T(P^T AP)y,$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)^T, y = (y_1, \cdots, y_n)^T$. 因此, 二次型 Q 关于新变元 $y_1, \cdots, y_n$ 的矩阵为 $P^T AP$.

通过变元的线性替换, 实对称矩阵的相合标准形可以用来化简二次型.

定义 ((有理) 标准形)

若二次型经过非退化的线性变换 $x = Py$ 化为

$$\widetilde{Q}(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

则称 $\widetilde{Q}$ 为 Q 的一个(有理) 标准形.

下面通过对称矩阵的正交合同标准形和规范形, 给出两个特殊的 (有理) 标准形:

定理 (正交标准形)

任意给定实二次型 $Q = x^T Ax$, 存在正交变换 $x = Py$ 将 Q 化为

$$\widetilde{Q}(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

这里的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值. 称 $\widetilde{Q}$ 为 Q 的正交标准形.

定理 (规范形 (实标准形))

任意给定二次型 Q, 存在线性变换 $x = Py$ 使得

$$Q = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2,$$

其中 r 和 s 不依赖于 P 的选取. 我们称

- $y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2$ 为 Q 的规范形(或实标准形);
- r 和 s 为 Q 的正负惯性指数.

问题:

1. 如何寻找二次型的标准形?
2. 如何寻找二次型的规范形?
3. 如何寻找二次型的正交标准形?

配方法(求标准形)

例 (含平方项)

$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2+x_3^2.$

例 (无平方项)

$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3.$

定理

任意二次型都可由配方法化为标准形.

证明思路: 情形一: $a_{11}\neq 0$; 情形二: $a_{11}=0$ 但对某个指标 i 有 $a_{ii}\neq 0$; 情形三: 对角元 a_{ii} 全为零, 但 $a_{ij}\neq 0$; 情形四: $A=0$.

类似于求解线性方程组的 Gauss 消元法可以用矩阵的初等变换表示, 在这里二次型的配方法也可以用矩阵的初等变换来表示.

定理 (配方法能用矩阵实现的理论依据)

对于任意给定的实对称矩阵 A 都存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_r$ 使得

$$P_r^T\cdots P_1^TAP_1\cdots P_r=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).$$

初等变换法(具体算法步骤)

第一步:

1. 若 $a_{11} \neq 0$,
   - 将第 1 列的 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 列;
   - 将第 1 行的 $-a_{1i}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 行.

   $\Rightarrow$ 可逆阵 P_1 使得 $P_1^TAP_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$.
2. 若 $a_{11} = 0$, 且存在对角元 $a_{ii} \neq 0$.
   - 交换第 1 列与第 i 列;
   - 交换第 1 行与第 i 行;
   - 回到第一步.
3. 若对角线全为零且第一行 (第一列) 不为零. 即, 存在 $i = 2, \cdots, n$ 使得 $a_{i1} = a_{1i} \neq 0$.
   - 将第 i 行加到第一行;
   - 将第 i 列加到第一列;
   - 回到第一步.
4. 若对角线全为零且第一行和第一列全为零. 则 $A = \begin{pmatrix} 0 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$.

第二步: 递归下去, 对 $n-1$ 阶矩阵 A_{n-1} 重复第一步.